

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT**

BÁO CÁO HỌC THUẬT

**MỘT SỐ BÀI TOÁN
PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1**

Thạc sỹ: Nguyễn Thùy Linh

Hà Nội, 6/2023

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT**

BÁO CÁO HỌC THUẬT

**MỘT SỐ BÀI TOÁN
PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1**

Xác nhận của bộ môn

Hà Nội, 6/2023

Lời nói đầu

Khi nghiên cứu hiện tượng vật lý, quá trình kỹ thuật, các nhà khoa học luôn cố gắng tìm ra quy luật biến chuyển cũng như mô tả quá trình trên bằng toán học. Tức là: tìm một quy luật hàm giữa các biến số tham gia vào quá trình này. Trong rất nhiều trường hợp, khi nghiên cứu một hiện tượng nào đó, chúng ta không thể trực tiếp xây dựng được một quy luật phụ thuộc giữa các biến x và y , thế nhưng ta lại có thể lập được một mối quan hệ giữa các đại lượng x, y và các đạo hàm của y theo x : $y', y'', \dots, y^{(n)}$. Tức là viết được một phương trình vi phân thường cấp n .

Trong báo cáo này, tôi ứng dụng đưa ra một số ví dụ ứng dụng phương trình vi phân cấp một để giải.

Báo cáo được chia thành các chương sau:

Phần 1. Các khái niệm về phương trình vi phân

Phần 2. Các dạng phương trình vi phân thường gặp

Phần 3. Một số bài toán

Hà Nội, tháng 6 năm 2023

Thạc sỹ

Nguyễn Thùy Linh

A. CÁC KHÁI NIỆM VỀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Định nghĩa: Phương trình vi phân cấp một là phương trình có dạng

$$F(x, y, y') = 0 \Leftrightarrow y' = f(x, y)$$

Trong đó: x là biến; y là hàm; y' là đạo hàm

Nghiệm của phương trình vi phân cấp một là hàm số $y = \varphi(x, C)$ sao cho khi thay vào phương trình thu được đồng nhất thức.

Bài toán Cauchy cấp một là bài toán giải phương trình vi phân cấp 1 có kèm theo điều kiện ban đầu

Định lý (sự tồn tại và duy nhất nghiệm)

Cho phương trình vi phân cấp một $y' = f(x, y)$. Giả sử $f(x, y)$ liên tục trên miền D chứa điểm (x_0, y_0) . Khi đó trong một lân cận nào đó của điểm $x = x_0$ tồn tại ít nhất một nghiệm $y = f(x)$ của phương trình trên, lấy giá trị y_0 khi $x = x_0$.

Ngoài ra nếu $f'_y(x, y)$ cũng liên tục trong miền D thì nghiệm ấy là duy nhất.

Điều kiện $y = y(x)$ lấy giá trị y_0 khi $x = x_0$ được gọi là điều kiện ban đầu và viết là $y(x_0) = y_0$ hoặc $y|_{x=x_0} = y_0$

Bài toán tìm nghiệm của phương trình vi phân cấp một thỏa mãn điều kiện ban đầu đó được gọi là bài toán Cauchy của phương trình.

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp một $y' = f(x, y)$ là hàm số $y = \varphi(x, C)$ trong đó C là một hằng số thỏa mãn các đk:

- Nó thỏa mãn phương trình vi phân với mọi giá trị của C
- Với $\forall(x_0, y_0)$ ở đó điều kiện của định lý trên được thỏa mãn, có thể tìm được một giá trị $C = C_0$ sao cho hàm số $y = \varphi(x, C)$ thỏa mãn điều kiện ban đầu $y|_{x=x_0} = y_0$.

Nghiệm riêng của phương trình vi phân cấp một là mọi hàm số $y = \varphi(x, C)$ mà ta có được bằng cách cho C trong nghiệm tổng quát một giá trị xác định C_0

B. CÁC DẠNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1 THƯỜNG GẶP

I. PHƯƠNG TRÌNH PHÂN LY

Định nghĩa: Là phương trình có dạng

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0$$

Hoặc có dạng

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y)$$

Các phương trình trên có thể được đưa về dạng $f(x)dx = g(y)dy$

Cách giải:

Ta có $y = y(x) \rightarrow dy = y'(x)dx$, thay vào phương trình ta được

$$f(x)dx = g(y(x))y'(x)dx$$

Tích phân 2 vế ta được

$$\int f(x)dx = \int g(y(x))y'(x)dx = \int g(y)dy$$

$$\Leftrightarrow \int f(x)dx = \int g(y)dy$$

Ví dụ 1: Giải các phương trình

$$a) \quad y' \cos x = \frac{y}{\ln y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} \cos x = \frac{y}{\ln y} \Leftrightarrow \frac{\ln y}{y} dy = \frac{1}{\cos x} dx \Leftrightarrow \int \frac{\ln y}{y} dy = \int \frac{1}{\cos x} dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln^2 y = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + C$$

$$b) x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = -\sqrt{1-y^2} + C$$

Ngoài ra ta có các nghiệm $x = 1, x = -1; y = 1; y = -1$ là các nghiệm kì dị.

Nhận xét: Nhiều khi cần chia 2 vế của phương trình cho y (hoặc cho $g(y)$), thường ta phải kiểm tra xem $y = 0$ hoặc $g(y) = 0$ có phải là nghiệm hay xác định nghiệm) hay không.

II. PHƯƠNG TRÌNH THUẦN NHẤT

1. Dạng cơ bản

Định nghĩa: Là pt dạng $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Cách giải:

Đặt: $u = \frac{y}{x} \rightarrow y = ux$.

Khi đó: $y' = u'x + ux' = u'x + u$

Ta có: $u'x + u = f(u) \rightarrow u'x = f(u) - u \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}$

Điều kiện: $f(u) - u \neq 0$

Nên

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

Ví dụ: Tìm nghiệm của phương trình $x \left(y' - \sin \frac{y}{x} \right) = y$ thỏa mãn điều kiện $y(1) = \frac{\pi}{2}$.

Giải.

Ta có $x \left(y' - \sin \frac{y}{x} \right) = y \Leftrightarrow y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$

Đặt: $u = \frac{y}{x} \rightarrow y = ux$.

Khi đó: $y' = u'x + ux' = u'x + u$

Ta có $u'x + u = u + \sin u \Leftrightarrow u'x = \sin u \Leftrightarrow x \frac{du}{dx} = \sin u$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{\sin u} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln \tan u = \ln Cx \Leftrightarrow \tan u = Cx \Leftrightarrow \tan \frac{y}{2x} = Cx$$

Vì $y(1) = \frac{\pi}{2}$ nên $\tan \frac{\pi}{4} = C \rightarrow C = 1$.

Vậy nghiệm cần tìm là:

$$\tan \frac{y}{2x} = x$$

2. Phương trình có thể đưa được về dạng thuần nhất

Định nghĩa : Là phương trình dạng

$$y' = f \left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \right)$$

Trong đó a_i, b_i, c_i là các hằng số ($i = 1, 2$)

Cách giải

- Nếu hệ phương trình $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ có định thức khác không

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

Thì có thể giải ra nghiệm duy nhất $x = x_0; y = y_0$. Khi đó ta đặt

$$\begin{cases} u = x - x_0 \\ v = y - y_0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = u + x_0 \\ y = v + y_0 \end{cases}; \quad dx = du, dy = dv, v = v(u)$$

Phương trình trở thành $\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v}\right)$ là phương trình thuần nhất (u – biến độc lập; v – hàm phải tìm; các hệ số c_1, c_2 biến mất; hệ số a_1, a_2, b_1, b_2 bảo toàn)
Ta đặt $t = \frac{v}{u}$ sẽ đưa phương trình về dạng biến số phân ly của biến t và u .

- Nếu hệ phương trình $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$ có định thức bằng không

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

Thì bằng cách đặt $z = a_1 x + b_1 y$ hoặc $z = a_1 x + b_1 y + c_1$ hoặc $z = a_2 x + b_2 y + c_2$ (x – biến độc lập, z – hàm), ta đưa về dạng phân ly.

Ví dụ : Giải phương trình

$$(x - y)dx + (2y - x + 1)dy = 0$$

Giải :

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x + 1 \\ v = y + 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = u - 1 \\ y = v - 1 \end{cases}$$

Ta có $dx = du, dy = dv$, phương trình trở thành

$$(u - v)du + (2v - u)dv = 0$$

$$\text{Đặt } t = \frac{v}{u} \rightarrow v = tu \text{ thì } dv = udt + tdu$$

Khi đó ta có phương trình

$$(u - tu)du + (2tu - u)(udt + tdu) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2tu - u)u dt + (u - 2tu + 2t^2u)du = 0$$

Với $u \neq 0$, phương trình tương đương với

$$\frac{2t-1}{1-2t+2t^2} dt = -\frac{du}{u}$$

$$\Leftrightarrow \ln \sqrt{1-2t+2t^2} = -\ln Cu$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy + 2y^2 + 2y = C$$

III. PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Là phương trình có dạng $y' + p(x)y = q(x)$ trong đó $p(x)$ và $q(x)$ là các hàm số liên tục trên miền D .

1. Phương trình thuần nhất $y' + p(x)y = 0$

Công thức nghiệm $y = Ce^{-\int p(x)dx}$

2. Phương trình tổng quát $y' + p(x)y = q(x)$

Phương pháp: Để tìm nghiệm của phương trình tổng quát ta sử dụng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

Nghiệm phương trình tổng quát

$$y = [K + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx]e^{-\int p(x)dx}$$

IV. PHƯƠNG TRÌNH BERNOLLI

Định nghĩa: Là phương trình dạng $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$

Điều kiện $p(x), q(x)$ liên tục, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

Phương trình $y^{-\alpha}y' + p(x)y^{-\alpha+1} = q(x)$

Cách giải:

Đặt $z = y^{1-\alpha} \rightarrow z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$. Phương trình trở thành $\frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z = q(x)$ là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 hàm z ẩn x .

Ví dụ: Giải PTVP

$$y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4$$

Giải

Ta có $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4 \Leftrightarrow y^{-4}y' + \frac{1}{x}y^{-3} = x^2$

Đặt $z = y^{-3} \rightarrow z' = -3y'y^{-4}$

PT trở thành $\frac{z'}{-3} + \frac{1}{x}z = x^2 \Leftrightarrow z' - \frac{3}{x}z = -3x^2$

Nghiệm TQ:

$$z = \left[K + \int -3x^2 e^{\int \frac{3}{x} dx} dx \right] e^{\int \frac{3}{x} dx} = \left[K + \int -3x^2 x^{-3} dx \right] x^3 = (K - 3 \ln x)x^3$$

$$\rightarrow y^{-3} = (K - 3 \ln x)x^3$$

V. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TOÀN PHẦN

Định nghĩa: Là phương trình có dạng $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

Nếu $\begin{cases} P_y' = Q_x' \\ P, Q, P_y', Q_x' \text{ liên tục trên } D \end{cases}$ thì phương trình đã cho được gọi là ptvp toàn phần

Khi đó nghiệm của phương trình là $u(x, y) = C$ trong đó $u(x, y)$ được tính bởi công thức

$$u(x, y) = \begin{cases} \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy \\ \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy \end{cases}$$

với (x_0, y_0) là điểm tùy ý thuộc D .

Ví dụ: Giải phương trình $(4xy^2 + y)dx + (4x^2y + x)dy = 0$

Giải.

Ta có $\begin{cases} P = 4xy^2 + y \\ Q = 4x^2y + x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P'_y = 8xy + 1 \\ Q'_x = 8xy + 1 \end{cases} \rightarrow P'_y = Q'_x$ và P, Q, P'_y, Q'_x là các hàm liên

tục. Vậy phương trình đã cho là pt vi phân toàn phần

Chọn $(x_0, y_0) = (0, 0)$

Nghiệm phương trình $u(x, y) = C$ với

$$u(x, y) = \int_0^x 0 dx + \int_0^y (4x^2y + x) dy = 2x^2y^2 + xy$$

C. MỘT SỐ BÀI TOÁN

I. XÁC ĐỊNH HÀM CẦU KHI BIẾT HỆ SỐ CO DẪN CỦA CẦU THEO GIÁ TẠI MỖI MỨC GIÁ VÀ LƯỢNG CẦU

Như ta đã biết, hệ số co giãn của cầu theo giá được tính theo công thức

$$\varepsilon = \frac{dQ}{dp} \cdot \frac{p}{Q}$$

Trong đó Q là *lượng cầu* hàng hóa p . Nếu ta biết được hệ số co giãn $\varepsilon = \varepsilon(p, Q)$ thì hàm cầu có thể được xác định thông qua phương trình vi phân

$$\frac{dQ}{dp} \cdot \frac{p}{Q} = \varepsilon(p, Q)$$

Ví dụ 1: Giả sử $\varepsilon = -k$ (k là một hằng số dương), tức là hệ số co giãn của cầu theo giá không đổi, ta có:

$$\frac{dQ}{dp} \cdot \frac{p}{Q} = -k \Leftrightarrow \frac{dQ}{Q} = -k \frac{dp}{p}.$$

Giải phương trình vi phân này ta tìm được dạng hàm cầu có hệ số co giãn không đổi:

$$Q = Cp^{-k} \text{ (} C \text{ là hằng số dương)}$$

Ví dụ 2: Tìm hàm cầu $Q = D(p)$, cho biết hệ số co giãn của cầu theo giá

$$\varepsilon = -\frac{5p + 2p^2}{Q}$$

Và lượng cầu ở mức giá $p = 10$ là 500.

Giải phương trình vi phân

$$\frac{dQ}{dp} \cdot \frac{p}{Q} = -\frac{5p + 2p^2}{Q} \Leftrightarrow \frac{dQ}{dp} = -5 - 2p$$

Ta tìm được $Q = -p^2 - 5p + C$.

Thay $p = 10, Q = 500$ ta xác định được hằng số $C = 650$.

Vậy hàm cầu là $Q = 650 - p^2 - 5p$.

II. MỘT SỐ VÍ DỤ THỰC TẾ

Ví dụ 1: Giả sử $C(t)$ là nồng độ thuốc trong máu. Vì cơ thể đào thải thuốc nên $C(t)$ giảm dần theo tốc độ tỷ lệ với lượng thuốc có mặt trong cơ thể. Như vậy $C'(t) = -kC(t)$, trong đó k là hằng số dương, gọi là hằng số đào thải thuốc.

a) Nếu C_0 là nồng độ tại thời điểm $t = 0$, tìm nồng độ tại thời điểm t .

- b) Nếu cơ thể đào thải nửa lượng thuốc trong 30 giờ, sau bao lâu thì 90% lượng thuốc bị đào thải?

Giải.

- a) Ta có

$$\frac{dC}{C} = -kdt \rightarrow \int \frac{dC}{C} = -kt + D$$

Hay

$$\ln C = -kt + D \text{ (do } C > 0)$$

Ta nhận được $C = e^D e^{-kt}$ hay $C = ae^{-kt}$, a là hằng số dương tùy ý.

Từ điều kiện đã cho thì $C_0 = a \cdot 1$.

$$\text{Vậy } C = C_0 e^{-kt}.$$

- b) Vì

$$\frac{C_0 e^{-kt_0}}{C_0} = 0,5$$

Nên

$$k = \frac{\ln 2}{t_0} = \frac{\ln 2}{30}$$

$$\frac{C_0 e^{-kt}}{C_0} = 0,1 \rightarrow t = \frac{\ln 10}{k} = 99,67 \approx 100 \text{ (giờ)}$$

Ví dụ 2 : Tốc độ gia tăng dân số của một thị trấn tỷ lệ thuận với số người dân ở đó tại thời điểm t . Dân số ban đầu là 500, tăng 15% sau 10 năm. Hỏi dân số sau 30 năm sẽ là bao nhiêu? Tốc độ gia tăng dân tại $t = 30$ là bao nhiêu?

Giải.

Gọi $S(t)$ là hàm biểu thị dân số của thị trấn đó tại thời điểm t

$$\Rightarrow \text{Tốc độ gia tăng dân số : } \frac{dS(t)}{dt}$$

Theo giả thiết:

$$\frac{dS(t)}{dt} = kS(t) \rightarrow \frac{dS(t)}{S(t)} = kdt \rightarrow \int \frac{dS(t)}{S(t)} = \int kdt$$

$$\rightarrow \ln(S(t)) = kt + C \rightarrow S(t) = e^{kt+C} = C_0 e^{kt}$$

Mà: $S(0) = 500$

$$\rightarrow C_0 = 500 \rightarrow S(t) = 500e^{kt}$$

Sau 10 năm dân số tăng 15% nên:

$$S(10) = S(0) + 15\%.S(0) = 500 + 500.15\% = 575$$

$$\rightarrow 500 \cdot e^{10t} = 575 \rightarrow k = \frac{\ln(1,15)}{10} \rightarrow S(t) = 500e^{\left(\frac{\ln(1,15)}{10}\right)t}$$

Dân số sau 30 năm:

$$S(30) = 500e^{\left(\frac{\ln(1,15)}{10}\right)30} = 760$$

Vậy tốc độ gia tăng dân số tại $t = 30$

$$\frac{dS(30)}{dt} = \left(\frac{dS(t)}{dt}\right)_{t=30} = (C_0 k e^{kt})_{t=30} = 500 \left(\frac{\ln(1,15)}{10}\right) e^{\left(\frac{\ln(1,15)}{10}\right)30} = 10,63 \text{ (người/năm)}$$

Ví dụ 3 (Nhiệt độ nhiệt kế)

Theo định luật Newton, tốc độ nguội một vật sẽ tỷ lệ thuận với hiệu nhiệt độ vật và nhiệt độ môi trường xung quanh. Một nhiệt kế được lấy ra từ một căn phòng nơi có nhiệt độ là 70°F và mang ra bên ngoài nơi nhiệt độ không khí là 10°F . Sau 30 giây chỉ số nhiệt kế là 50°F . Đọc chỉ số nhiệt kế sau thời gian 1 phút? Mất bao lâu để nhiệt kế đạt 15°F ?

Giải:

Gọi $u(t)$ ($^\circ\text{F}$) là hàm biểu diễn nhiệt độ của nhiệt kế tại thời điểm t (phút)

$u_{mt} = 10^\circ\text{F}$ là nhiệt độ của môi trường

Sự biến thiên nhiệt độ nhiệt kế theo thời gian tuân theo định luật Newton là:

$$\frac{du(t)}{dt} = k(u(t) - u_{mt}) = k(u(t) - 10) \rightarrow \frac{d(u(t))}{u(t) - 10} = k dt \rightarrow \int \frac{d(u(t))}{u(t) - 10} = \int k dt$$

$$\rightarrow \ln(u(t) - 10) = kt + C \rightarrow u(t) - 10 = e^{kt+C} = C_0 e^{kt} \rightarrow u(t) = 10 + C_0 e^{kt}$$

Tại thời điểm ban đầu:

$$u(0) = 10 + C_0 = 70 \rightarrow C = 60 \rightarrow u(t) = 10 + 60e^{kt}$$

Sau 30 giây (1/2 phút), nhiệt độ:

$$u\left(\frac{1}{2}\right) = 10 + 60e^{\frac{k}{2}} = 50 \rightarrow k = 2 \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\rightarrow u(t) = 10 + 60e^{(2 \ln(\frac{2}{3}))t}$$

Sau thời gian 1 phút, nhiệt độ nhiệt kế:

$$u(1) = 10 + 60e^{(2 \ln(\frac{2}{3})).1} = 36,67^\circ F$$

Tại $t = T$, nhiệt độ $u(T) = 15^\circ F$

$$\rightarrow 10 + 60e^{(2 \ln(\frac{2}{3}))T} = 15$$

$$\rightarrow T \approx 3.064 \text{ (phút)}.$$

Ví dụ 4 (dung dịch nước muối)

Một bể chứa 200 lít chất lỏng trong đó có 30g muối được hòa tan. Nước muối có chứa 1g muối mỗi lít được bơm vào bể với tốc độ 4 lít/phút, dung dịch trộn đều được bơm ra với cùng tốc độ. Tìm số $A(t)$ gram muối trong bể vào thời điểm t .

Giải:

Nồng độ muối được bơm vào bể là 1 g/lít.

Tốc độ bơm nước vào bể là 4 lít/phút.

Số gam muối vào bể sau mỗi phút là: $(1 \text{ g/lít}) \cdot (4 \text{ lít/phút}) = 4 \text{ (g/phút)}$

Gọi $A(t)(g)$ là hàm biểu thị lượng muối có trong bể vào thời điểm t .

Nồng độ nước muối trong bể là:

$$\frac{A(t)}{200} (g/lít)$$

Số gam muối ra khỏi bể sau mỗi phút là:

$$\frac{A(t)}{200} \cdot 4 = A(t) \cdot 50 \text{ (g/phút)}$$

Sự biến thiên lượng muối có trong bể sau thời gian t :

$$\frac{dA(t)}{dt} = 4 - \frac{A(t)}{50}$$

$$\rightarrow \int \frac{dA(t)}{200 - A(t)} = \int \frac{dt}{50} \leftrightarrow -\ln(200 - A(t)) = \frac{t}{50} + C$$

$$\rightarrow 200 - A(t) = C_0 e^{-\frac{t}{50}} \rightarrow A(t) = 200 - C_0 e^{-\frac{t}{50}}$$

Tại thời điểm ban đầu:

$$A(0) = 30 \rightarrow C_0 = 170 \rightarrow A(t) = 200 - 170e^{-\frac{t}{50}}$$

Ví dụ 5 (Tăng trưởng dân số)

Trong một thành phố, các nhà dân số học quan sát thấy rằng tốc độ tăng trưởng của dân số thành phố tỷ lệ với cỡ của dân số tại mọi thời điểm. Cách đây hai mươi năm, dân số của thành phố này là 125000 người. Năm nay, dân số của thành phố này là 140000 người. Sau hai mươi năm, dân số của thành phố này sẽ là bao nhiêu ?

Giải.

Gọi $y(t)$ là dân số của thành phố này tại thời điểm t .

Vì tốc độ tăng trưởng của dân số thành phố tỷ lệ với cỡ của dân số tại mọi thời điểm nên

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

Nghĩa là $y(t) = Ae^{kt}$

Cách đây 2 năm, dân số của thành phố này là 125000 người nên $y(0) = 125000$

$$\Leftrightarrow A = 125000$$

Tức là $y(t) = 125000e^{kt}$

Năm nay, dân số của thành phố là 140000 người nên $y(20) = 140000$

$$\Leftrightarrow 125000 \cdot e^{20t} = 140000 \Leftrightarrow e^{20t} = 1,12$$

Do đó, dân số của thành phố này tại thời điểm t là :

$$y(t) = 125000 \cdot e^{kt} = 125000 \cdot (e^{20k})^{\frac{1}{20}} = 125000 \cdot (1,12)^{\frac{t}{20}}$$

Vậy dân số của thành phố này sau 20 năm sẽ là

$$y(40) = 125000 \cdot (1,12)^{\frac{40}{20}} = 156800$$

Ví dụ 6 (Ánh sáng bị hấp thụ)

Lượng ánh sáng bị hấp thụ khi đi qua một lớp nước tỷ lệ với lượng ánh sáng và độ dày của lớp nước. Biết rằng sau khi đi qua lớp nước dày $2m$, lượng ánh sáng bị hấp thụ bằng $1/3$ lượng ánh sáng ban đầu. Hỏi còn bao nhiêu phần ánh sáng đi đến được độ sâu $12m$?

Giải.

Gọi $y(x)$ là lượng ánh sáng tại độ sâu x (m) của lớp nước.

Tại độ sâu x , lượng ánh sáng đi qua là $y(x)$.

Sau khi đi qua lớp nước dày dx , tại độ sâu $x + dx$, lượng ánh sáng là: $y(x + dx)$

Lượng ánh sáng bị hấp thụ $\Delta = y(x + dx) - y(x) = dy$

Theo đề bài, lượng bị hấp thụ này tỉ lệ với lượng ánh sáng y và độ dày dx của lớp nước theo hệ số tỉ lệ k .

$$dy = k \cdot y \cdot dx \rightarrow \frac{dy}{y} = k dx \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int k dx \rightarrow y = C_0 e^{kx}$$

Lượng ánh sáng ban đầu tại vị trí mặt nước ($x = 0$) là $y(0) = y_0$

$$\rightarrow C_0 = y_0$$

$$y(x) = y_0 e^{kx}$$

Tại độ sâu $2m$ lượng ánh sáng bị hấp bằng $1/3$ lượng ánh sáng ban đầu, tức là lượng ánh sáng tại độ sâu này bằng $2/3$ lượng ánh sáng ban đầu

$$\rightarrow y(2) = y_0 e^{2k} = \frac{2}{3} y_0 \rightarrow e^{2k} = \frac{2}{3}$$

Tại độ sâu $12m$, lượng ánh sáng:

$$y(12) = y_0 e^{12k} = y_0 (e^{2k})^6 = y_0 \left(\frac{2}{3}\right)^6 = 0,088 y_0$$

Kết luận

Báo cáo đã đưa ra một số ví dụ ứng dụng phương trình vi phân cấp 1.

Tài liệu tham khảo

1. Phạm Tuấn Cường, Phạm Ngọc Anh, Hoàng Ngự Huân, Nguyễn Thị Kim Sơn, Lê Bích Phượng ,*Giáo Trình Giải tích 2*, Nhà xuất bản Đại Học Quốc gia Hà Nội, 2020.
2. Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Toán học cao cấp*. Nhà xuất bản Giáo dục ,2008 .
3. Lê Đình Thúc,*Toán cao cấp cho các nhà kinh tế* , Nhà Xuất bản Đại học Kinh tế Quốc dân,2007.
4. Tô Văn Ban, *Giáo trình giải tích II*, Nhà Xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2015